

**Sobre as formas forte, fraca e variacional de problemas modelados via equações diferenciais**

***On strong, weak, and variational forms of problems modeled by differential equations***

*Bruno de Araújo Pavão Pereira Filho<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Pavão Engenharia. Rua Antônio Moreti, 229, Parque dos Servidores, Ribeirão Preto, São Paulo, Brasil.*

E-mail autor correspondente: *pavaocivilprojetos@gmail.com*

## **RESUMO**

O presente artigo é dedicado ao estudo das formas forte, fraca e variacional de problemas modelados por equações diferenciais (ordinárias ou parciais), direcionando-se ao pesquisador do assunto, abrangendo-se problemas de valores de contorno (PVC) das áreas de Física e Engenharia. É desenvolvida a dedução da equação de Euler-Lagrange generalizada para campos escalares e vetoriais, servindo-se de ferramenta para o trabalho de problemas de tais tipos. Apresenta-se a forma fraca de PVC's e sua equivalência analítica com a forma variacional com auxílio do formato da equação de Euler-Lagrange desenvolvido. O conceito de derivada de Fréchet também é introduzido a fim de servir para a compreensão do significado matemático da equação de Euler-Lagrange. Desta forma, o artigo é desenvolvido como uma ferramenta de auxílio ao pesquisador desses temas, em especial àqueles dedicados aos estudos de métodos numéricos de solução de PVC's baseados nas suas formas fraca e variacional.

Palavras-chave: cálculo variacional; equações diferenciais; métodos numéricos.

## **ABSTRACT**

*This paper is dedicated to the study of the strong, weak, and variational forms of problems modeled by differential equations (ordinary or partial). It is addressed to researchers investigating such issue, comprehending boundary value problems from Physics and Engineering. It develops deduction of Euler-Lagrange formula generalized for scalar and vector fields, working as a tool for these kinds of problems. It presents the weak form of boundary value problems and their analytical equivalence with the variational form aided by the developed form of the Euler-Lagrange formula. Also, it presents the concept of Fréchet derivative to comprehend the mathematical significance of Euler-Lagrange formula. Thus, this paper is developed as a tool to aid researchers investigating such themes, especially those dedicated to study the numerical solutions of boundary values problems based on weak and variational forms.*

*Keywords: variational calculus; differential equations; numerical methods.*

## 1. INTRODUÇÃO

No âmbito científico, verifica-se que uma grande maioria dos problemas físicos é modelada via equações diferenciais, tema recorrente de pesquisas acadêmicas nas Ciências Exatas. Na literatura sobre o assunto, considerável parte desses problemas físicos podem ser descritos por sua **forma forte**, composta por um conjunto de equações diferenciais acompanhadas de suas condições de contorno (Boyce e DiPrima, 2017), caracterizando, por definição, um problema de valor de contorno (PVC). No âmbito deste trabalho, tais condições de contorno são dadas como naturais (ou de Neumann) e essenciais (ou de Dirichlet); as primeiras se referem aos valores que as derivadas da função assumem no contorno (ou fronteira) do domínio do problema físico; já as segundas se referem a quais valores tal função assume nesse mesmo contorno. Tais condições podem surgir de forma isolada ou simultaneamente num dado problema (condição de contorno mista).

Encontrar a função solução de um problema descrito na sua forma forte por métodos analíticos é uma tarefa frequentemente inexecutável, seja pela complexidade das equações diferenciais ou, como talvez ocorra mais frequentemente, pela própria geometria do domínio do problema físico e de suas condições de contorno.

Desta forma, o uso de métodos numéricos com soluções aproximadas se torna indispensável na Física e especialmente na Engenharia. A título de exemplo, podem-se citar os clássicos métodos de Galerkin (Belytschko et. al., 1994), Rayleigh-Ritz (Meirovitch e Kwak, 1990) e o Método dos Elementos Finitos (Zienkiewicz, 1977), sendo que esse último possui extensa aplicação em *softwares* comerciais de engenharia. Os métodos citados fazem uso das **formas fraca** e **variacional** do problema físico estudado, as quais se correlacionam diretamente com sua respectiva forma forte, viabilizando a implementação das rotinas computacionais dos *softwares*.

## 2. OBJETIVOS

O presente artigo é dedicado ao pesquisador da área de equações diferenciais e métodos numéricos (como o MEF), servindo de instrumento para o estudo das formas forte, fraca e variacional, com foco em problemas físicos estudados no âmbito da Física e da Engenharia. Demonstra-se, ainda, uma apresentação diferenciada da Equação de Euler-Lagrange, apresentando-se sua aplicação para problemas de campos escalares ou campos vetoriais, de modo a abranger com mais praticidade tal escopo de problemas. A equivalência entre as diferentes formas (forte, fraca e variacional) de apresentação dos problemas físicos é explicitada automaticamente ao longo do texto. É fundamental que o leitor tenha familiaridade com passagens matemáticas, as quais são apresentadas da forma mais clara possível, de modo a facilitar a leitura do texto.

### 3. MATERIAL E MÉTODOS

O presente artigo se fundamenta na revisão bibliográfica sobre o assunto estudado, apresentando as teorias sobre equações diferenciais, cálculo variacional, métodos numéricos e aplicações práticas, de modo a se produzir um texto de apoio ao pesquisador do assunto. Destacam-se as contribuições em Fish e Belytschko (2007), White (1985), Aragon (1980), Brezis (2010) e Assan (2003).

### 4. DISCUSSÃO

#### 4.1 Desenvolvimento de uma expressão geral para a equação de euler-lagrange

A princípio, será apresentada a dedução da fórmula de Euler-Lagrange para problemas de campos escalares e vetoriais. Tal dedução é fundamental para a compreensão de aplicações de soluções via métodos numéricos que empregam a via variacional.

Considere-se um conjunto de  $m$  funções reais  $f_i: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i \in C^n$  (ou seja, funções suaves, sendo as próprias e suas derivadas contínuas no domínio) e suas respectivas derivadas parciais  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ . Um funcional  $F$ , dado em função de  $f_i$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  é tal que:

$$F = F \left( [f_i], \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right) \quad (1)$$

Sendo  $x_j \in \Omega$ , tal que  $f_i = f_i(x_j)$ . Considere-se, ainda,  $\partial\Omega_N$  e  $\partial\Omega_E$  como as fronteiras de  $\partial\Omega$  em que as condições naturais e essenciais de contorno são respectivamente prescritas para o problema modelado, caracterizando-se um **problema de valor de contorno com condição de contorno mista**. Destaca-se que  $F$  também pode ser dado em termos de derivadas superiores de  $f_i$ , mas esse não será o caso explorado neste texto.

As funções  $f_i$  podem ter uma diversidade de significados físicos a depender do problema modelado como, por exemplo, campos vetoriais de deformações ou eletromagnéticos, campos escalares de temperatura, deslocamentos de corpos, dentre outros.

Prosseguindo, considera-se que a integral de  $F$  em  $\Omega$  seja igual a uma função  $\Pi$ , a qual se adiciona mais uma integral na fronteira desse mesmo domínio, tal que se tenha:

$$\Pi = \int_{\Omega} F \left( [f_i], \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} f_i \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right] \cdot n_j \right) d\Gamma_N \quad (2)$$

Na expressão (2), tem-se que  $\Gamma_N = \partial\Omega_N$ , ou seja, a fronteira de  $\Omega$  em que as condições naturais de fronteira são prescritas;  $f_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  e  $n_j$  é o vetor unitário normal a  $\Gamma_N$ , o qual aponta para fora desta. Nos problemas analisados neste texto, a primeira integral em (2) corresponde aos valores afins do domínio  $\Omega$  do problema, enquanto a segunda integral, aos valores afins de fronteira. Entenda-se por valores afins, por exemplo, no caso de problemas em que  $\Pi$  corresponde a energia potencial total do sistema, sendo a primeira integral a energia no domínio e a segunda, a energia na fronteira, a qual compreende a condições naturais de contorno. Ademais, a integral  $\Pi$  é comumente chamada de forma variacional ou energética do problema físico estudado.

De forma geral, tem-se que  $\Pi$  pode ter diversos significados físicos de acordo com o problema modelado, como a energia potencial total de um sistema, o tempo de uma trajetória de um corpo e o comprimento ou área de um objeto. Outrossim,  $\Pi$  também corresponde a um funcional.

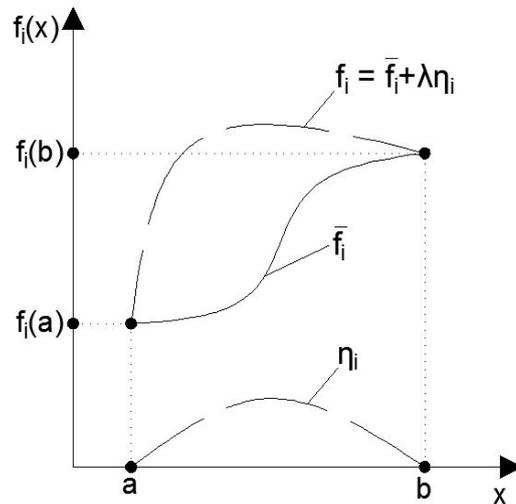
Tomando-se, por exemplo, o problema de fluxo estacionário de calor no plano, tem-se que a primeira integral de  $\Pi$  compreende a energia térmica no plano e a segunda, a energia térmica adentrando a fronteira. O exemplo no tópico 5.2 deste texto exemplifica esse caso.

Pela definição clássica da literatura afim, a equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial dada em termos das derivadas parciais de  $F$  em  $f_i$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  cuja solução leva à minimização de  $\Pi$  ou, equivalentemente, ao ponto estacionário desse funcional. O ponto estacionário de  $\Pi$  é denotado pela aplicação do operador variacional  $\delta$  a esse funcional igualado a 0, ou seja,  $\delta\Pi = 0$ , o que significa que tal ponto possui variação nula (de forma análoga às funções do Cálculo). O operador  $\delta$  corresponde à variação de um funcional ou ainda de uma função ou uma variável. Em suma, a aplicação de  $\delta$  em  $\Pi$  vem no sentido de se obter a função solução  $\bar{f}_i$ , a qual determina o ponto estacionário de  $\Pi$ , satisfazendo-se a condição de equilíbrio do sistema. Além disto,  $\bar{f}_i$  deve também satisfazer a forma forte deste mesmo problema.

Desta forma, considerando-se as funções em  $F$ , é possível escrever suas expressões na forma  $f_i = \bar{f}_i + \lambda\eta_i$ , tal que  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\eta_i: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\forall \eta_i(\Omega) > 0$  e  $\eta_i(\partial\Omega_E) = 0$ . Destaca-se que, sob essa definição,  $\eta_i$  é considerada uma função arbitrária e  $f_i$  se torna uma função dada no entorno da função solução  $\bar{f}_i$ . Analogamente, adota-se o mesmo procedimento para as derivadas parciais dessas funções, ou seja,  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} + \lambda \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}$ , o que também se repete para as derivadas parciais de ordem superior.

A título de demonstração, tomando-se o caso unidimensional em que (função escalar), as expressões de  $f_i$ ,  $\bar{f}_i$  e  $\eta_i$  podem ser interpretadas pela Figura 1.

Figura 1: interpretação unidimensional de  $f_i$ ,  $\bar{f}_i$  e  $\eta_i$ .



A variação de  $f_i$  e suas primeiras derivadas parciais (o que também se aplica também às derivadas parciais de ordem superior) pode ser computada nas equações em (3) e (4), respectivamente.

$$\delta f_i = f_i - \bar{f}_i = \lambda \eta_i \quad (3)$$

$$\delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

Em relação a  $F$ , sua variação é dada pela conseqüente variação de suas variáveis:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta F \left( [x_j], [f_i], \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta f_i \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right] \cdot n_j \right) d\Gamma_N \quad (5)$$

Como não se possui a expressão de  $F$ , já que a mesma é diferente para cada problema modelado, é conveniente expandir (5) numa série de Taylor truncada na primeira derivada em torno de  $f_i$  e  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ , conforme expressão (6). O tópico 4.3 deste texto explicita esse procedimento em pormenores matemáticos.

$$\delta F = F\left([f_i + \delta f_i], \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\right) - F\left([f_i], \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\right) \cong \frac{\partial F}{\partial f_i} \delta f_i + \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

São feitas as seguintes notações vetoriais:

$$\begin{aligned} \nabla_0 \mathbf{F} &= \frac{\partial f_i}{\partial x_j}; \quad \nabla_{li} \mathbf{F} = \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}}; \\ \nabla(\mathbf{a}f_i) &= \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j}; \quad \mathbf{n} = n_j; \quad \mathbf{a}f = \delta f_i; \end{aligned}$$

Logo, tem-se que a variação  $\delta \Pi$  é dada por:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_{\Omega} \delta F\left([x_j], [f_i], \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]\right) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta f_i \left(\left[\frac{\partial F}{\partial f_{i,j}}\right] \cdot n_j\right) d\Gamma_N \\ &= \int_{\Omega} [\nabla_0 \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{f} + \nabla_{li} \mathbf{F} \cdot \nabla(\delta f_i)] d\Omega - \int_{\Gamma_N} \delta f_i (\nabla_{li} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N \end{aligned} \quad (7)$$

Considere-se, agora, a Segunda Identidade de Green dada com relação a uma função  $w: \Omega \subset R^n \rightarrow R$  e a outra função  $\mathbf{q}: \Omega \subset R^n \rightarrow R^n$ :

$$\int_{\Omega} w(\nabla \cdot \mathbf{q}) d\Omega = \int_{\Gamma} w(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{q} d\Omega \quad (8)$$

Observe-se que ao se analisar a fórmula da integração por partes  $-\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$  - termo a termo com a equação em (8), percebe-se a correlação entre ambas, sendo que a integração por partes é dedicada ao caso de funções unidimensionais e a Segunda Identidade de Green, a campos vetoriais.

Prosseguindo, tem-se que  $\Gamma = \partial\Omega$  e  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à fronteira  $\Gamma$  que aponta para fora da mesma. Fazendo-se  $\mathbf{q} = \nabla_{li} \mathbf{F}$ ,  $\nabla w = \nabla(\mathbf{a}f_i)$  e sabendo-se que a integral em  $\Gamma$  é não nula somente sobre  $\Gamma_N$ , conforme já mencionado, é possível reescrever a expressão do segundo termo do primeiro integrando em (7).

$$\int_{\Omega} [\nabla_0 \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{f} - \delta f_i \nabla \cdot \nabla_{1i} \mathbf{F}] d\Omega + \int_{\Gamma_N} \delta f_i (\nabla_{1i} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N \quad (9)$$

Substituindo-se em (7), obtém-se a expressão em (10). Observe-se que a integral de fronteira desaparece nesta etapa, ou seja, a minimização do funcional depende apenas dos valores no próprio domínio  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} [\nabla_0 \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{f} - \delta f_i \nabla \cdot \nabla_{1i} \mathbf{F}] d\Omega = 0 \quad (10)$$

É possível tornar a notação vetorial mais compacta com  $\nabla_{1i} \mathbf{F} = \mathbf{JF}$ , a qual corresponde a uma **matriz jacobiana** de  $\mathbf{F}$  com relação às derivadas parciais das funções  $f_i$ . Chega-se, então, à expressão em (11).

$$\int_{\Omega} [\nabla_0 \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{f} - (\nabla \cdot \mathbf{JF}) \cdot \delta \mathbf{f}] d\Omega = 0 \quad (11)$$

Como  $\delta f_i = \lambda \eta_i = \lambda \zeta$ , é possível simplificar a expressão acima tal que:

$$\int_{\Omega} [\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF}] \cdot \eta d\Omega = 0 \quad (12)$$

Como  $\zeta = \eta_i > 0$ , a única maneira da integral em (12) ser sempre satisfeita é se:

$$\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF} = \mathbf{0} \quad (13)$$

A equação (13) é, por definição, a equação de Euler-Lagrange generalizada para funções  $f_i : \Omega \subset R^n \rightarrow R$ . Observa-se que para situações em que se trabalha com campos vetoriais, tem-se simplesmente  $m > 1$ , ou  $\mathbf{f} : \Omega \subset R^n \rightarrow R^m$ . A expansão da mesma, em termos dos índices  $i$  e  $j$ , tal que  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq i \leq m$  (sendo  $m$  o número de funções  $f_i$ ), é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial f_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} = 0 \quad (14)$$

Em (14), a equação de Euler-Lagrange corresponde a um sistema de  $m$  equações diferenciais a  $n$  variáveis na forma  $L[f_i(x_j) - g_i(x_j)] = 0$ , sendo  $g_i(x_j)$  a função não homogênea da equação  $i$  e  $L$ , um operador diferencial. Portanto, a minimização de  $\Pi$  recai na obtenção da função solução  $\bar{f}_i$  através da solução do sistema de equações diferenciais.

Na literatura de Física-Matemática (e também sobre métodos numéricos), a equação de Euler-Lagrange permite realizar a ponte entre a forma forte e a forma variacional de um problema modelado por equações diferenciais, de modo que a equação (14) corresponda à forma forte propriamente dita.

Prosseguindo, destaca-se ainda a segunda integral de  $\Pi$  em (2):

$$\int_{\Gamma_N} f_i \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right] \cdot n_j \right) d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N \quad (15)$$

Essa integral engloba os valores afins na fronteira  $\Gamma_N$ . Especialmente nos casos em que  $\Pi$  corresponder a uma integral de energia, esse termo computa o fluxo de energia na fronteira.

Finalmente, uma forma compacta de  $\Pi$  pode ser dada pela equação (16). Tal expressão apresenta grande praticidade para a modelagem de problemas via energética (ou variacional), conforme será conferido adiante neste texto.

$$\Pi = \int_{\Omega} F(\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N \quad (16)$$

#### 4.2 Sobre a forma fraca de problemas modelados por equações diferenciais

No âmbito da análise numérica de problemas modelados por equações diferenciais, é frequente recorrer ao desenvolvimento da forma fraca a partir da forma forte. Tal forma, por exemplo, é a base do método de Galerkin e também tem recorrente uso no Método dos Elementos Finitos.

De forma geral, considera-se que uma forma forte é dada pela equação ou sistema de equações diferenciais da forma  $L[f_i(x_j) - g_i(x_j)] = 0$ , acompanhado de suas condições de fronteira. A forma fraca é obtida ao se multiplicar a expressão anterior e as condições de fronteira por uma função arbitrária  $\eta_k$  e realizar a integração no domínio  $\Omega$ , conforme a expressão (17).

$$\int_{\Omega} \eta_k \left( L \left[ f_i(x_j) - g_i(x_j) \right] \right) d\Omega = 0 \quad (17)$$

Observa-se que a função arbitrária, no contexto da análise numérica, tem o tratamento de função de forma  $\eta_k$ . A função aproximadora da solução do problema analisado numericamente é obtida via uma combinação de  $k$  funções de forma  $f_k$  multiplicadas respectivamente por  $k$  pesos  $a_k$ , o que justifica o uso desse índice na expressão (17), sendo  $a_k$  as incógnitas finais do problema. Desta forma, a própria equação (17) compreende o método de Galerkin.

Destaca-se ser fundamental que  $\eta_k$  obedeça aos mesmos critérios estipulados anteriormente no desenvolvimento da equação de Euler-Lagrange, ou seja,  $\eta_k : \Omega \subset R^n \rightarrow R$  tal que  $\forall \eta_k(\Omega) > 0$  e  $\eta_k(\Gamma_E) = 0$ .

Para exemplificação, apresenta-se a forma forte de um problema modelado por uma EDP elíptica (White, 1985), conforme (18), (19) e (20).

$$-K \cdot \nabla u + Cu - f = 0 \quad (18)$$

$$u(\Gamma_E) = 0 \quad (19)$$

$$K \nabla u(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = h(t) \quad (20)$$

Tem-se que (18) corresponde à EDP (ou a  $L[f_i(x_j) - g_i(x_j)] = 0$ ), com  $f = f(x, y)$  como a função não homogênea, sendo  $K$  e  $C$  constantes, com  $u : \Omega \in R^2 \rightarrow R$ ; (19), às condições essenciais de contorno e (20), às condições naturais, sendo  $h(t)$  a função prescrita na fronteira  $\Gamma$  e  $\mathbf{n}$  sendo o vetor que aponta para fora dessa. Tomando-se por base a equação em (17), a forma fraca da forma forte desse problema é descrita por (21), (22) e (23).

$$\iint_{\Omega} \eta_k [-K \nabla \cdot \nabla u + Cu - f] d\Omega = 0 \quad (21)$$

$$\int_{\Gamma_E} \eta_k u d\Gamma_E = 0 \quad (22)$$

$$\int_{\Gamma_N} \eta_k \nabla u \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} \eta_k h(t) d\Gamma_N \quad (23)$$

Em problemas modelados por EDP's elípticas, a forma fraca se torna útil pela aplicação da Segunda Identidade de Green (análoga da integração por partes, conforme mencionado anteriormente) na expressão referente à equação diferencial; desta forma, tomando-se o primeiro termo do integrando de (21) com base na expressão em (8), tem-se que:

$$\iint_{\Omega} \eta_k (-K \nabla \cdot \nabla u) d\Omega = \iint_{\Omega} (-K \nabla \eta_k \cdot \nabla u) d\Omega - \int_{\Gamma} \eta_k (K \nabla u \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (24)$$

Sendo que  $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_N$ , a integral em  $\Gamma$  à direita é nula em  $\Gamma_E$ , pois  $\eta_k$  é nula nesta fronteira e ao se tomar o valor de (23) em  $\Gamma_N$ , obtém-se:

$$\iint_{\Omega} [-K \nabla \eta_k \cdot \nabla u + C \eta_k u - f] d\Omega - \int_{\Gamma_N} \eta_k h(t) d\Gamma = 0 \quad (25)$$

A equação (25) corresponde à forma fraca do problema dado anteriormente. Considerando-se que a função  $u$  seja tomada por uma função aproximadora tal que  $u \cong \bar{u} = u_k \eta_k$ , a equação (25) representará um sistema linear cuja solução, dada em termos de  $u_k$  e restrita com base em (19), compõe de forma discreta e aproximada o valor da função solução de tal problema. Cita-se, por exemplo, o **Método dos Elementos Finitos** como ferramenta que emprega a forma fraca como mecanismo de obtenção desse sistema de equações. Além disto, o **método de Galerkin** também utiliza diretamente essa técnica para a solução numérica de equações diferenciais.

Analisa-se, ainda, a equivalência entre as formas variacional e fraca. Tome-se por base a expressão em (12) com a notação de  $\delta \mathbf{f} = \lambda \eta_i$  expandida em índice:

$$\int_{\Omega} (\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF}) \cdot \eta_i d\Omega = 0 \quad (12)$$

Sabe-se que  $\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF} \equiv L[f_i(x_j)] - g_i(x_j) = \mathbf{0}$ , o que corresponde tanto à equação de Euler-Lagrange quanto ao sistema de equações diferenciais. Logo, tem-se que:

$$\int_{\Omega} [L[f_i(x_j)] - g_i(x_j)] \eta_k d\Omega = 0 \quad (26)$$

A expressão em (26) equivale exatamente forma fraca de um problema modelado por equações diferenciais. No que tange às condições de fronteira, o exemplo anterior demonstra como a identidade de Green se mostra muito útil no desenvolvimento da forma fraca em problemas de valores de contorno em EDP's elípticas.

### 4.3 Sobre a expansão em série de Taylor de um funcional

Quanto ao desenvolvimento da expansão em série de Taylor em (6), faz-se necessário realizar algumas observações de cunho teórico. Em suma, um funcional define-se matematicamente como uma função cujo domínio é um espaço vetorial e a imagem, um corpo de escalares (Aragon, 1980), sendo que, neste estudo, tem-se tratados funcionais integrais autônomos, ou seja, aqueles cuja variação é independente das variáveis do domínio das funções (como coordenadas de espaço ou tempo).

O uso da expansão em série de Taylor de um funcional, de fato, representa um artifício para se denotar sua derivação e a seguinte igualação a 0, de modo que sequer são considerados os termos de ordem superior do funcional na expansão em (6). Por outro lado, exigem-se critérios mais rigorosos para a derivação de um funcional. Este tópico, portanto, dedica-se a esclarecer tais pontos em aberto, tornando a compreensão do desenvolvimento da equação de Euler-Lagrange mais completa e abrangente.

Define-se, então, a derivada de Fréchet (Behmardi e Nayeri, 2008).

**Definição 1.** Seja  $x$  um ponto do conjunto aberto  $U \subset X$ . Uma aplicação  $f:U \rightarrow Y$  é diferenciável à Fréchet (ou F-diferenciável) em  $x \in U$  se existe um operador linear contínuo  $A \in L(x, Y)$ , sendo  $A := f'$  (ou seja, a derivada da aplicação), tal que:

$$\lim_{\|h\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0 \quad (27)$$

Tal que  $\|\bullet\|_{X,Y}$  corresponde à norma euclidiana nos espaços  $X$  e  $Y$ . No contexto deste texto, tem-se que  $f$  corresponde ao funcional  $F$  (ou  $\Pi$ ); logo, o domínio  $X$  corresponde a um espaço vetorial de Hilbert  $H$  e  $Y$ , a um corpo de escalares, ou seja,  $f = F: U \subset H \rightarrow R$ . Disto decorre o Teorema de Representação Riesz-Fréchet (Brezis, 2010).

**Teorema 1.** Teorema de Representação de Riesz-Fréchet. Seja  $H$  um espaço de Hilbert, real ou complexo, munido do produto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  e  $F:U \subset H \rightarrow R$  uma aplicação linear contínua. Então existe um único vetor  $u \in H$  tal que:

$$G(x) = \langle u, h \rangle, \quad \forall h \in H \quad (28)$$

Fazendo-se  $G(x) = \delta F$  (a variação de um funcional ainda é um funcional com mesmo domínio e imagem), assume-se que  $\mathbf{u}$  corresponde ao operador gradiente de  $F$ , ou seja,  $\mathbf{u} = \nabla F = \mathbf{A}$ , conforme expressão (27). Logo:

$$\delta F = \langle \nabla F, \mathbf{h} \rangle, \forall \mathbf{h} \in H \quad (29)$$

Como deseja-se encontrar os mínimos (ou os pontos estacionários) de  $F$ , tem-se que  $\delta F = 0$ ; a partir de (29), a única maneira de se satisfazer tal equação é:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (30)$$

Considere-se a expansão em Taylor feita em (6):

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial f_i} \delta f_i + \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \equiv \left\langle \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial f_i} \right], \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right] \right), \left( \left[ \delta f_i \right], \left[ \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right) \right\rangle \quad (31)$$

Considerando-se o disposto em (29), (30) e (31), tem-se que  $\nabla F := \left( \left[ \frac{\partial F}{\partial f_i} \right], \left[ \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right] \right)$  e  $\mathbf{h} := \left( \left[ \delta f_i \right], \left[ \delta \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \right)$  (sendo  $\mathbf{h}$  a variação das variáveis do funcional). Logo:

$$\delta F = 0 \Leftrightarrow \nabla F = \mathbf{0} \Leftrightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial f_i}, \frac{\partial F}{\partial f_{i,j}} \right) = \mathbf{0} \quad (32)$$

A expressão em (32) denota a equação de Euler-Lagrange. Destaca-se que essa forma engloba uma expressão de nulidade dos termos do gradiente  $\nabla F$  (ou seja, o ponto estacionário do funcional, como ocorre no Cálculo); a expressão desenvolvida em (13) compreende a aplicação da segunda identidade de Green em (8), de modo que o sistema de EDP's  $L[f_i(x_j) - g_i(x_j)] = 0$ , o qual também compreende a condição para obtenção do ponto estacionário do funcional.

Com isto, torna-se claro que o uso da expansão da série da Taylor truncada na primeira ordem é apenas um artifício para se obter a primeira derivada do funcional, a qual, igualada a 0, fornece a sua minimização, se realizada também com funções do Cálculo. Com isto, torna-se claro o desenvolvimento da Equação de Euler-Lagrange.

## 5. EXEMPLOS PRÁTICOS

### 5.1 Problema unidimensional: a curva braquistócrona

O clássico problema da curva braquistócrona (Leitão, 2001), formulado em 1696 por Johann Bernoulli, é dado pela seguinte proposição:

“Sejam  $P_0$  e  $P_1$  dois pontos dados sobre um plano vertical. Deve ser encontrada uma curva unindo esses dois pontos de sorte que um ponto de massa partindo de  $P_0$  que a percorra sob a influência somente de seu próprio peso e alcance  $P_1$  no menor tempo possível. Considere ainda a velocidade inicial  $v_0$  dada.”

Em termos matemáticos, tal problema é formulado através da obtenção do ponto estacionário de um funcional  $J$  tal que:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(t, y, y') dx = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{1 + (y')^2}{2gy + c} \right) dx \quad (33)$$

$$y \in \left\{ C^1[x_0, x_1] \mid y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \right\} \quad (34)$$

Tem-se que  $g$  é a constante gravitacional e  $c$  é a soma das energias potencial e cinética do corpo. O funcional  $J$  compreende o tempo da trajetória do corpo – o que explica o motivo de se obter seu mínimo. Sendo  $y = f : \Omega \in R^1 \rightarrow R^1$ , tem-se que a equação de Euler-Lagrange em (13) (ou em (14)) assume a seguinte forma:

$$\nabla_0 F - \nabla \cdot \mathbf{JF} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{dF}{dy} - \frac{d}{dt} \frac{dF}{dy'} = 0 \quad (35)$$

Destaca-se que a expressão em (35) é frequentemente encontrada na literatura sobre cálculo variacional, a qual estabelece a minimização de (33). Assim, tomando-se  $F(t, y, y')$  de  $J$  e aplicando em (35), tem-se que:

$$2yy'' + y' + 1 = 0 \quad (36)$$

Uma solução geral (Leitão, 2001) desse problema é dada em termos da parametrização da posição do corpo em termos da variável  $\theta$ :

$$x(t) = b + a(\theta + \text{sen}\theta) \quad y(t) = a(1 + \text{cos}\theta) \quad (37)$$

Tal que  $\theta$  é ângulo da curva desenvolvida na trajetória do corpo e  $a$  e  $b$  são constantes a serem determinadas para a solução particular do problema, descritas em termos de coordenadas iniciais.

Destaca-se que o exemplo em questão é clássico na literatura sobre cálculo variacional, servindo apenas de demonstração do caso de um problema unidimensional, não exigindo-se muito aprofundamento. Adiante, serão abordados problemas de campos escalares e vetoriais que demonstrem a aplicação da equação desenvolvida em (13) para casos mais complexos de problemas de valores de contorno.

## 5.2 Problema de um campo escalar: transferência estacionária de calor no plano

A transferência de calor em regime estacionário no plano é modelada pela seguinte forma forte (Fish & Belytschko, 2007):

$$-k\nabla \cdot \nabla T + s = 0 \quad (38)$$

$$T(\Gamma_E) = 0 \quad (39)$$

$$-k\nabla T(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (40)$$

Tal que  $k$  é a condutividade térmica do material no plano, assumido isotrópico;  $T = T(x, y)$  é a função do campo escalar de temperatura a ser encontrada;  $s = s(x, y)$  é o fluxo de calor no plano; e  $t_0$  e  $h(t)$  são as prescrições de temperatura e fluxo de calor na fronteira  $\Gamma_N$ , respectivamente.

Tratando-se esse de um problema em que  $f = T : \Omega \in R^2 \rightarrow R$ , tem-se que a equação de Euler-Lagrange para o caso é dada como em (41).

$$\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial T} - \nabla \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial T_x}, \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial T_x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial T_y} = 0 \quad (41)$$

A equação (41) corresponde à (38); expandindo-se  $\nabla \cdot \nabla T$ , decorre que:

$$\frac{\partial F}{\partial T} = s \Rightarrow F(T) = sT + k_T \quad (42)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial T_x} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial T_x} = k \frac{\partial T}{\partial x} + A(x) \Rightarrow F(T_x) = k \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + A(x) \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial T_y} = -k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial T_y} = k \frac{\partial T}{\partial y} + B(y) \Rightarrow F(T_y) = k \frac{1}{2} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + B(y) \frac{\partial T}{\partial y} \quad (44)$$

Logo, assumindo-se  $k_T = A(x) = B(y) = 0$ , o funcional de energia total interna  $I$  no domínio  $\Omega$  fica dado por (45).

$$I = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (2sT + k\nabla T) d\Omega \quad (45)$$

Observa-se que  $I$  compreende a energia no domínio. Logo, conforme a expressão (16)  $\Pi = \int_{\Omega} F(\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N$ , deve-se computar também a energia na fronteira.

Desta forma, tem-se também o funcional  $E$ , o qual corresponde energia externa total na fronteira  $\Gamma_N$  (denotando as condições naturais de contorno do problema), representado pela segunda integral em  $\Pi$  dada por (15).

$$E = \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} T \left( \frac{\partial F}{\partial T_x}, \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N \quad (46)$$

Considerando-se (43) e (44), tem-se que:

$$E = \int_{\Gamma_N} T \left( \frac{\partial F}{\partial T_x}, \frac{\partial F}{\partial T_y} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} -Tk \left( \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} T (-k\nabla T \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N \quad (47)$$

Sendo  $-k\nabla T \cdot \mathbf{n}$  correspondente às condições naturais de fronteira expressas em (40), tem-se que:

$$E = \int_{\Gamma_N} Th(t) d\Gamma_N \quad (48)$$

Enfim, o funcional de energia potencial total  $J$  do sistema é dado por (49). Destaca-se ser interessante que  $J$  possa acomodar em uma única expressão as informações relativas ao problema modelado com o uso da expressão (16).

$$J = I - E = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (2sT + k\nabla T) d\Omega - \int_{\Gamma_N} Th(t) d\Gamma_N \quad (49)$$

### 5.3 Problema de um campo vetorial: equilíbrio de forças no plano

Explora-se um caso em que a forma forte de um problema é obtida a partir de sua forma variacional. O funcional  $W$  que fornece a energia potencial total de um corpo plano sob estado plano de tensões (Assan, 2003), é dado por (50):

$$W = \int_{\Omega} (ub_x + vb_y) d\Omega - \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_N} (uq_x + vq_y) d\Gamma \quad (50)$$

Entenda-se como plano um objeto tridimensional tal que duas de suas dimensões são muito superiores à terceira. Na Mecânica dos Sólidos, o estado plano de tensões é a situação na qual tanto as deformações quanto as tensões perpendiculares ao plano são desprezíveis (em suma, quando o plano possui espessura  $t$  razoavelmente reduzida).

Na expressão (50), tem-se que  $u = u(x, y)$  e  $v = v(x, y)$  correspondem às translações dos pontos  $x, y$  do plano  $\Omega$  sob deformação;  $E$  e  $\nu$  correspondem aos módulos de elasticidade e Poisson do material do plano e  $t$ , a espessura do mesmo;  $b_x$  e  $b_y$  são as componentes nesses eixos da forças de corpo (forças que atuam no contínuo, como a gravitacional ou magnética); e  $q_x$  e  $q_y$  são as forças distribuídas por unidade de comprimento na fronteira  $\Gamma_N$ . O funcional  $F$  compreende o integrando em  $\Omega$ , enquanto a segunda integral engloba os valores afins de fronteira, tal que se tem  $W = \int_{\Omega} F(\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}) d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N$  com  $\mathbf{f} = (u, v)$ .

Sendo  $u, v : \Omega \in R^2 \rightarrow R^2$  o formato da equação de Euler-Lagrange fica dada por (51).

$$\nabla_0 \mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{JF} = \mathbf{0} \Rightarrow \left( \frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_x} & \frac{\partial F}{\partial v_x} \\ \frac{\partial F}{\partial u_y} & \frac{\partial F}{\partial v_y} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (51)$$

O termo matricial em (51) reforça a notação  $\mathbf{JF}$  para casos de funções  $f_i : \Omega \in R^n \rightarrow R^m$ , com  $1 < i \leq m$  e  $m, n > 1$ . Prosseguindo, aplicando-se essa equação em  $F$ , tem-se:

$$\begin{cases} \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + b_x = 0 \\ \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + b_y = 0 \end{cases} \quad (52)$$

Em termos de tensões, o equilíbrio de forças num plano é ilustrado pela Figura 7.

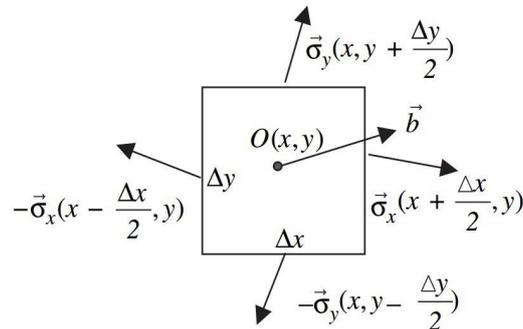


Figura 7: equilíbrio de forças num plano. Fonte: Fish e Belytschko, 2007, p. 221.

Na Figura 7, tem-se que  $\sigma_x = (\sigma_{xx}, \tau_{xy})$  e  $\sigma_y = (\tau_{xy}, \sigma_{yy})$ . Sob o estado plano de tensões, tem-se a seguinte relação tensão-deformação:

$$\sigma = D \cdot \hat{a}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}; \hat{a} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}; D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Além disto, tem-se que:

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (54)$$

Enfim, aplicando-se (53) em (54), tem-se que (52) pode ser apresentado como em (55).

$$\begin{cases} \nabla \sigma_x + b_x = 0 \\ \nabla \sigma_y + b_y = 0 \end{cases} \quad (55)$$

O sistema de equações em (55) caracteriza o equilíbrio de forças num plano, conforme dado em Fish e Belytshcko (2007). Resta, por fim, considerar a integral na fronteira  $\Gamma_N$ .

$$\int_{\Gamma_N} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{JF} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} (uq_x + vq_y) d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} (u, v) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_x} & \frac{\partial F}{\partial v_x} \\ \frac{\partial F}{\partial u_y} & \frac{\partial F}{\partial v_y} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N = \int_{\Gamma_N} (u, v) \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} d\Gamma_N \quad (56)$$

Sendo a integral em  $\Gamma_N$  a que corresponde aos valores afins de fronteira, com base na expressão em (50), tem-se que as condições naturais de fronteira ficam dadas por:

$$\sigma_x(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = q_x \quad (57)$$

$$\sigma_y(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = q_y \quad (58)$$

Obtém-se, então, a forma forte do problema modelado na expressão (59).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + b_x = 0 \\ \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + b_y = 0 \\ u(\Gamma_E) = U \\ v(\Gamma_E) = V \\ \sigma_x(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = q_x \\ \sigma_y(\Gamma_N) \cdot \mathbf{n} = q_y \end{array} \right. \quad (59)$$

Desta forma, conclui-se que é possível desenvolver a forma forte a partir da forma variacional e vice-versa, conforme visto no exemplo anterior.

## 6. CONCLUSÃO

O Cálculo Variacional é uma ferramenta fundamental na Física, Matemática e Engenharia. Sua aplicação se estende dos campos da Mecânica Clássica aos da Mecânica Quântica, dentre diversos outros temas, como a Topologia e os métodos numéricos de otimização. Neste contexto, o presente trabalho apresentou uma proposta para a representação da equação de Euler-Lagrange, a qual se mostra útil para generalizar a aplicação na forma variacional de problemas unidimensionais, de campos escalares e vetoriais. Evidenciam-se também as formas fortes e fracas desses mesmos problemas, tal como a correlação desses entre si e também com a forma variacional.

Em suma, buscou-se por uma abordagem didática e formalista explorar o âmbito dos estudos de equações diferenciais, fazendo deste texto uma ferramenta para auxiliar o pesquisador do assunto. O desenvolvimento da equação de Euler-Lagrange, com sua notação generalizada a problemas de várias dimensões, demonstra-se como a principal ferramenta apresentada, de modo a facilitar sua aplicação aos diversos tipos de problemas em estudo na Matemática, Física e Engenharia, em especial àqueles modelados por EDP's elípticas.

## REFERÊNCIAS

- ARAGON, F. F. et al. Cálculo variacional e aplicações. Dissertação de mestrado – UNICAMP. Campinas (SP), p. I-I. 1980.
- ASSAN, A. E. Método dos elementos finitos: primeiros passos. Campinas (SP): Ed. Da UNICAMP, 2003.
- BELYTSCHKO, T.; Lu, Y. Y.; Gu, L. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 37, n. 2, p. 229-256, 1994.
- BEHMARDI, D.; Nayeri, E. D. Introduction of Fréchet and Gâteaux derivative. *Applied Mathematical Sciences*, v. 2, n. 20, p. 975-980, 2008.
- BOYCE, W. E.; DiPrima, R. C.; Meade, D. B. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. LooseLeaf Print Companion, John Wiley & Sons, 7ª edição, p. 511, 2017.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, p. 135, 2010.
- FISH, J., Belytschko, T. *A first course in finite elements*. Wiley, p. 141-221, 2007.
- LEITÃO, A. Cálculo variacional e controle ótimo. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Aplicada (IMPA), p. 17, 2001.
- MEIROVITCH, L.; Kwak, M. K. Convergence of the classical Rayleigh-Ritz method and the finite element method. *AIAA Journal*, v. 28, n. 8, p. 1509-1516, 1990.
- PARNOVSKY, A. S. Some generalizations of brachistochrone problem. *Acta Physica Polonica-Series A General Physics*, v. 93, n. 145, p. 55-64, 1998.
- WHITE, R. E. *An introduction to the finite element method with applications to nonlinear problems*. John Wiley, 1985.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et al. *The finite element method*. London, McGraw-hill, v.2, 1977.