ENVIRONMENTAL SCIENCE & TECHNOLOGY INNOVATION

Método para o Cálculo de Derivadas de Ordem Superior de Funções Racionais Particulares.

Method for the Calculus of High Order Derivates of Particular Rational Functions.

Gabriel de Araújo Petraglia[1]; Fátima Regina Lima Ribeiro[1]; Rosane Maria Lima Araújo[1]; Beatriz Antoniassi Tavares[1].

[1]Centro Universitário Sagrado Coração, Bauru/SP, Brasil.

E-mail (autor principal): *gapetraglia@gmail.com*

RESUMO

O cálculo, além de essencial para o estudo da matemática, é umas das ferramentas indispensável à realização e à resolução das diversas inovações e situações no mundo atual, e embora haja uma infinidade de softwares que realizam contas mais rápido que uma pessoa, antes de submeter um problema real à inteligência computacional é preciso, primeiro, solucioná-lo manualmente. No entanto, quando se trata do estudo de derivadas de ordem superior de funções racionais particulares, sobretudo as de potências elevadas, o trabalho se torna complexo. Assim, o objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento e a demonstração matemática de uma lei de formação, denominada Derivada Petraglia, através da qual se obtém a enésima derivada de quaisquer funções do tipo 1/xk e – 1/xk. Para tanto, foi realizado um estudo do comportamento das derivadas no processo de derivação sucessiva destas funções seguida pela dedução de uma lei de formação geral para quaisquer derivadas de uma função racional particular positiva ou negativa a partir dos padrões observados. Verifica-se que é possível demonstrar matematicamente uma lei de formação sem necessitar das derivações pelo método do quociente, que é regra de derivação para funções compostas, e pode ser aplicada, também, a derivadas elementares, ou ao método da potência com expoente negativo. Com isso, a Derivada Petraglia para funções racionais particulares positivas e negativas se apresenta como uma nova forma de resolução de derivadas enésimas de quaisquer ordens de grandeza, facilitando os desenvolvimentos algébricos feitos manualmente e reduzindo consideravelmente o número de etapas e as chances de erro.

Palavras-chave: *Derivada enésima. Lei de formação. Derivada Petraglia.*

ABSTRACT

Calculation, in addition to being essential for the study of mathematics, is one of the indispensable tools for the realization and resolution of the diverse innovations and situations in the world today, and although there is a multitude of software that perform math faster than a person, before to submit a real problem to the intelligence of a computer, it must first be solved manually. However, when it comes to the study of higher order derivatives of particular rational functions, especially those of high power, the work becomes complex. In this way, the goal of this article is the development and the mathematic demonstration of a formation law, called the Petraglia Derivative, through which the n-th derivative of any functions of the type 1/xk and – 1/xk is obtained. For that, a study was carried out on the behavior of derivatives in the process of successive derivation of these functions followed by the deduction of a general formation law for any derivatives of a particular positive or negative rational function from the observed patterns. It is verified that it is possible to mathematically demonstrate a formation law without needing the derivations by the quotient method, which is a derivation rule for compound functions, which can also be applied to elementary derivatives, or to the power method with negative exponent. In this way, the Petraglia Derivative for positive and negative particular rational functions are presented as a new way of solving n-th derivatives of any order of magnitude, facilitating the algebraic developments made manually and considerably reducing the number of steps and the chances of error.

Keywords: *Umpteenth derivative. Training law. Petraglia derivative.*

INTRODUÇÃO

O cálculo é uma ferramenta indispensável à realização e à resolução das mais diversas situações no mundo de hoje. Uma rede de fast food, quando deseja saber a quantidade de combos que deve vender em certo período para atingir o lucro máximo, recorre a recursos do cálculo. Enquanto engenheiros e cientistas utilizam da mesma ferramenta para traçar rotas de foguetes, de modo a otimizar ao máximo o gasto e a quantidade de combustível para o voo.

Contudo, independente de suas mais recentes aplicações, os fundamentos do cálculo pertencem aos grandes pensadores do século XVII: ao físico inglês Isaac Newton (1642-1727), ao matemático alemão, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e a tantos outros (Hoffmann & Bradley, 2011).

Conforme Anton (2000) afirma, naquela época, outros eram os problemas a serem solucionados: encontrar a taxa com a qual uma grandeza física varia em função da variação de outra grandeza; determinar áreas de figuras disformes, como as curvas em gráficos cartesianos e em imagens irregulares; calcular o volume de sólidos irregulares, como vasos e recipientes sem formas definidas, entre outros.

E, pelo fato de estar presente em diversas situações cotidianas relacionadas ao movimento e por possuir aplicações em várias áreas do conhecimento, o conceito de derivada é considerado um dos fundamentais do cálculo (Zuin, 2001). O conceito básico para compreender a definição de derivada é o do diferencial, visto que os infinitesimais são aceitos e utilizados em cálculo. Segundo Quezada (2008), a derivada será o quociente de dois diferenciais e a integral a operação inversa da diferenciação.

No entanto, para de fato submeter um cálculo matemático a um problema real, ou mesmo em aplicativos virtuais, como o Wolfram Alpha e o Geogebra, precisa-se, primeiro, solucioná-lo manualmente. Logo, a formulação de leis gerais de formação – ou fórmulas matemáticas – pode e é diretamente aplicada às linguagens de programação após serem traduzidas em algoritmos numéricos, de modo que o usuário define os parâmetros de entrada – como as variáveis de um sistema – e o programa executa o algoritmo, fornecendo-lhe dois possíveis resultados: segundo Campos (2012), “Uma solução via cálculo numérico é sempre numérica, enquanto os métodos analíticos usualmente fornecem um resultado em termos de funções matemáticas”.

Mas quando se trata do estudo de derivadas de ordem superior de funções racionais particulares, principalmente as de potência elevadas, o trabalho se torna complexo.

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento e a demonstração matemática de uma lei de formação, denominada Derivada Petraglia, através da qual se obtém a enésima derivada de quaisquer funções do tipo $1/x^k$ e $-1/x^k$, o que contribui para redução significativa das etapas de cálculo.

Para tanto, foi realizado um estudo do comportamento das derivadas no processo de derivação sucessiva destas funções seguida pela dedução de uma lei de formação geral para quaisquer derivadas de uma função racional particular positiva ou negativa a partir dos padrões observados.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foi realizado um estudo do comportamento das derivadas no processo de derivação sucessiva destas funções. Em seguida, levantou-se bibliografias e literaturas que convergiam para este assunto em busca de abordagens que comprovassem a validade destes padrões, como meio de sustentar a fórmula demonstrada.

A equação desenvolvida foi submetida à experimentação por meio da solução de derivações de diversas funções e sua comprovação por meio dos métodos acadêmicos e científicos já existentes, afirmando a efetividade da mesma.

Os resultados foram analisados através de uma metodologia hipotético-dedutiva, em que as hipóteses construídas foram contrapostas a testes, à discussão e ao confronto com os fatos para a verificação de quais são válidas e quais são refutáveis.

O estudo da derivada

Neste item, será feito uma análise aprofundada sobre os padrões observados na derivação sucessiva de funções racionais particulares, $f^{n}(x) = \pm 1/x^{k}$, sob a condição: k deve ser sempre maior que zero, isto é, pertencente ao conjunto dos números naturais diferentes de zero ($\mathbb{N}*$).

Segundo Flemming & Gonçalves (2006), “ A derivada de ordem n ou n-ésima derivada de f, representada por $f^{(n)}(x)$, é obtida derivando-se a derivada de ordem $n-1$ de f”. Então nosso objetivo é determinar uma regra para $f^{n}(x)$.

Inicialmente, serão abordados os métodos já existentes à resolução do problema: Método do Quociente e Método da Potência com Expoente Negativo.

A partir das derivações das funções $f(x)=1/x$, $g(x)=1/x^2$, $h(x)=1/x^3$ e $z(x)=1/x^4$, chegou-se à expressão genérica desenvolvida como Derivada Petraglia.

Método do quociente

Uma das regras de derivação utilizadas para determinar as derivadas de funções é o Método do Quociente. Segundo Stewart (2013) “[...] a Regra do Quociente diz que a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.”

$$Q' = \frac{d}{dx}[Q] = \frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

PETRAGLIA, G. A; RIBEIRO, F. G. L; ARAÚJO, R. M. L.; ANTONIASSI, B. Método para o cálculo de derivadas de ordem superior de funções racionais particulares. **Environmental Science & Technology Innovation**, Bauru, v.2, n.2, p. 159-171, dezembro de 2023.

Em outros termos, a Regra do Quociente consiste em uma função qualquer, diferenciável no intervalo dado, sendo dividida por um denominador, o qual também é uma função, diferenciável no mesmo intervalo.

Utilizando dessa regra para encontrar a derivada da função f(x)=1/x, considerando como numerador do quociente Q o número 1 e como denominador do mesmo a variável x, ter-se-á o seguinte caso:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\text{numerador de Q}}{\text{denominador de Q}}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{(1)'x - 1(x)'}{x^2} = \frac{(0)x - 1(1)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Assim, a primeira derivada de 1/x é $f^1(x) = -1/x^2$.

Seja, então, a primeira derivada de f(x), ou $f^1(x)$, derivável em x. Pelo Método do Quociente, é obtido: −1 como numerador do novo quociente e x^2 como seu denominador e a segunda derivada de f(x), ou $f^2(x)$ será:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{x^2}\right] = \frac{(-1)'x^2 — 1}{(x^2)^2} = \frac{(0)x^2 + 1(2x)}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Note que para determinar a segunda derivada de f(x), foi necessário, primeiro, determinar sua primeira derivada. Da mesma forma que para encontrar a terceira, teria de ser encontrada sua segunda e assim por diante.

Imagine, então, desejar-se analisar a décima derivada de f(x). Será necessário determinar todas as derivadas anteriores, da primeira à nona, para poder calculá-la. Seria relativamente trabalhoso e utilizar-se-ia uma quantidade considerável de papel, caneta e tempo.

Então, este método é eficiente até dado número de derivações que se deseja encontrar.

Método da potência com expoente negativo

Um segundo caminho para o cálculo de derivadas, possivelmente mais simples que o anterior, é o Método da Potência com Expoente Negativo.

Anton (2000) nos diz que “[...] para diferenciar x elevado a uma potência inteira, multiplique a potência por x elevado à potência menos um.”

Matematicamente, se p(x) é uma função diferenciável em x tal que $p(x) = x^n$, então $p'(x)$ ou $(d/dx)(x^n)$ é:

$$p'(x) = \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1};\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^*$$

Aplicando a equação acima para f(x)=1/x, ou x^{-1}, tem-se $n = -1$. Logo, $f^{1}(x)$ é dada por:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Então, $f^{1}(x) = -1/x^2$.

A partir do Método do Quociente, determina-se que $f^{2}(x)=2/x^3$. Então, pelo Método da Potência com Expoente Negativo, deve-se encontrar o mesmo resultado:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{x^2}\right] = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = -(-2)x^{-2-1} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

As operações algébricas são mais simples por esse método, quando comparadas às do quociente. No entanto, supondo a análise de derivadas mais altas de uma função racional particular, ainda haveria certo trabalho operacional a ser realizado.

Será demonstrado a seguir a Derivada Petraglia, com o intuito de reduzir e tornar mais eficazes as etapas de derivação sucessiva *ad hoc*.

Equação para derivadas de 1/x

Trabalhou-se os padrões observados em quatro fatores: (a) a relação entre a ordem (n) da derivada, o grau (k) da variável x e o grau (u) da variável da enésima derivada de f; (b) a oscilação de sinais das derivadas, de acordo com a positividade da função e a paridade de n; (c) o valor numérico do numerador das derivadas em função de n e k; (d) o denominador em função de k.

Analisando o Quadro 1 para os termos n, k e u da função f (x)=1/x, com k=1, encontra-se a relação entre eles.

Quadro 1. Derivadas de f(x) e a relação de n, k e u.

$f^{1}(x) = -1/x^2; \text{com } n = 1 \text{ e } k = 1; \text{Logo}, u = 2 = 1 + 1 = n + k$
$f^{2}(x) = 2/x^3; \text{com } n = 2 \text{ e } k = 1; \text{Logo}, u = 3 = 2 + 1 = n + k$
$f^{3}(x) = -6/x^4; \text{com } n = 3 \text{ e } k = 1; \text{Logo}, u = 4 = 3 + 1 = n + k$
$f^{4}(x) = 24/x^5; \text{com } n = 4 \text{ e } k = 1; \text{Logo}, u = 5 = 4 + 1 = n + k$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Então, com base no Quadro 1, $f^{n}(x) = 1/x^{u}, u = n + k \text{ ou } x^{n+k}$.

Agora, através de uma comparação, é possível afirmar sobre o sinal das derivadas conforme se deriva a função: há uma oscilação quanto à positividade das derivadas. Para $n = 1$, $f^{1}(x) < 0$, enquanto para $n = 2$, $f^{2}(x) > 0$, e assim segue.

O conceito aqui presente diz respeito à paridade da ordem da derivada, ou seja, se n é par ou ímpar.

Observe no Quadro 1 que, para n ímpar ($n = 1$, $n = 3$, etc.), as derivadas de f são negativas, enquanto para n par ($n = 2$, $n = 4$, etc.), elas assumem valores positivos.

Isso implica que as derivadas estão sendo multiplicadas por (−1), ora tornando a sentença positiva, ora negativa. Há uma relação entre a positividade de uma função e a paridade da ordem da derivada: um número negativo elevado a um expoente par resulta em um valor positivo; e quando ele se eleva a um expoente ímpar, o resultado é negativo.

Logo, pode-se dizer que as derivadas de uma função do tipo $f(x) = 1/x^{k}$ são multiplicadas pelo fator (−1) e que sua positividade depende da paridade da ordem n da função. Relacionando os valores de n com o sinal da derivada, pode-se afirmar $(-1)^{n}$ (b).

As proposições (a) e (b) nos permitem dizer que a quinta derivada de f, ou $f^{5}(x)$, será negativa e que a variável terá expoente igual a $n + k = 5 + 1 = 6$; Da mesma forma que sua quarta derivada, $f^{4}(x)$, será positiva e o expoente da variável será igual a $n + k = 4 + 1 = 5$, conforme o Quadro 2:

Quadro 2. Análise do expoente de x e da positividade das derivadas de f.

$$f^{4}(x) = 24/x^{5}; u = 5, f^{4}(x) > 0$$

$$f^{5}(x) = -120/x^{6}; u = 6, f^{5}(x) < 0$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Entretanto, ainda que comprovada a validade dos termos citados anteriormente, não se pode elaborar uma equação geral, pois há de se entender o comportamento do numerador e do denominador das derivadas sucessivas destas funções.

Para o primeiro, algumas considerações: será nomeado o numerador das derivadas de t e serão excluídos os sinais das mesmas, para efeito de estudo. Assim sendo, analise o Quadro 3, que aborda as cinco primeiras derivadas de f:

Quadro 3. Análise do numerador das derivadas de f.

$$f^{1}(x) = 1/x^{2}$$

$$f^{2}(x) = 2/x^{3}$$

$$f^{3}(x) = 6/x^{4}$$

$$f^{4}(x) = 24/x^{5}$$

$$f^{5}(x) = 120/x^{6}$$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Denota-se os respectivos valores de t como uma sequência A, em que são organizados em ordem crescente, analisando, simultaneamente, o valor de n, conforme o Quadro 4.

Quadro 4. Valores numéricos de t.

$\text{Para } n = 1, t = 1$
$\text{Para } n = 2, t = 2$
$\text{Para } n = 3, t = 6$
$\text{Para } n = 4, t = 24$
$\text{Para } n = 5, t = 120$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

A sequência A = (1, 2, 6, 24, 120) nos remete ao estabelecimento de uma relação de multiplicação de um termo de S por um valor para gerar seu sucessor, pois há uma variação dos valores de t.

A partir do Quadro 4, os valores de n e t se correlacionam por meio de fatoriais, pois 120 = 5! = 5.4.3.2.1, assim como 24 = 4! = 4.3.2.1 e então $t = n!$.

O segundo ponto a se verificar não se aplica ao caso de derivadas da função estudada neste item. Comprovaremos a existência de um termo no denominador adiante.

Agora, com os três fatores em mente, pode-se deduzir a expressão (1):

$$f^n(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+k}} \qquad (1)$$

Que corresponde à equação para a n-ésima derivada de f(x)=1/x.

O numerador e as derivadas

Afirmados os fatores (a) e (b), daremos foco ao terceiro. Para a análise de (c), se iniciará com a derivação de $g(x) = 1/x^2$ até sua terceira ordem ($n = 3$; $k = 2$).

Quadro 5. Derivada de terceira ordem de g(x).

$g^1(x) = -2/x^3$
$g^2(x) = 6/x^4$
$g^3(x) = -24/x^5$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Aplicando o conceito dos fatoriais e sendo t um valor numérico que representa o numerador de $g(x)$, verifica-se que, para $n = 1$, $t = 2 = 2!$. Da mesma forma que, para $n = 2$, $t = 6 = 3!$ e assim, para $n = 3$, $t = 24 = 4!$; assim por diante.

Compondo t em função de n e k, é visto que, quando $n = 1$ e $k = 2$, $t = (1 + 2 - 1)! = 2! = 2$; para $n = 2$ e $k = 2$, $t = (2 + 2 - 1)! = 3! = 6$; e, para $n = 3$ e $k = 2$, $t = (3 + 2 - 1)! = 4! = 24$. Então $t = (n + k - 1)!$ (c).

Com (c) definido, escreve-se a equação geral de formação para $g^n(x) = 1/x^2$:

$$g^n(x) = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{x^{n+k}} \qquad (2)$$

Fator denominador

Considere a análise das derivadas das funções $h(x) = 1/x^3$ e $z(x) = 1/x^4$, observa-se o porquê de as equações (1) e (2) serem inválidas para *n*-ésimas derivadas dessas funções: o numerador t de cada uma não pode ser escrito por fatoriais sem que antes sejam divididos por um outro fator – o fator denominador – o qual representaremos por p.

Observe no Quadro 6, a seguir:

Quadro 6. Derivadas de h(x) e z(x).

Para $h(x)$: $k = 3$	Para $z(x)$; $k = 4$
$h^1(x) = -3/x^4$	$z^1(x) = -4/x^5$
$h^2(x) = 12/x^5$	$z^2(x) = 20/x^6$
$h^3(x) = -60/x^6$	$z^3(x) = -120/x^7$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Verifica-se, para as derivadas de $h(x)$, o seguinte caso: para $n = 1$ e $k = 3$, $t = 3$; da mesma forma que, quando $n = 2$ e $k = 3$, $t = 12$; com $n = 3$ e $k = 3$, $t = 60$. Pode-se escrever, então, que quando $n = 1$ e $k = 3$, $t = 6/2$; ou para $n = 2$ e $k = 3$, $t = 24/2$; assim como que para $n = 3$ e $k = 3$, $t = 120/2$.

Pode-se concluir, até o momento, que $p = 2$, pois divide o numerador t resultando no real valor para as derivadas de $h(x)$. Então, se temos $k = 3$, $p = 2 = k - 1 = 3 - 1$.

Afirma-se, dessa forma, que a equação geral para $h^n(x)$ como:

$$h^n(x) = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)x^{n+k}} \qquad (3)$$

Contudo, retornando às derivadas de $z(x)$, compreende-se que a equação (3), ou melhor dizendo, o fator denominador (p) não valida as mesmas. Acompanhe:

Para $n = 1$ e $k = 4$, $t = 4$; para $n = 2$ e $k = 4$, $t = 20$; e para $n = 3$ e $k = 4$, $t = 120$. Assim, seria possível escrever: quando $n = 1$ e $k = 4$, $t = 24/6$; com $n = 2$ e $k = 4$, $t = 120/6$; da mesma forma, $n = 3$ e $k = 6$, $t = 720/6$. Agora t é dividido por $p = 6$.

Comparando os valores do denominador em função do grau da variável (k), além dos valores de p para $h^n(x)$ e $z^n(x)$, verifica-se: para $k = 3$, $p = (3 – 1)! = 2! = 2$ e para $k = 4$, $p = (4 – 1)! = 3! = 6$.

Então, o fator denominador é definido por um fatorial, como $(k−1)!$ (d).

RESULTADOS

A partir da análise das etapas supracitadas, foi deduzida a Derivada Petraglia através da manipulação dos termos desenvolvidos ao longo da metodologia. Buscou-se a demonstração de duas resoluções: às funções racionais particulares positivas e às funções racionais particulares negativas.

Funções racionais particulares positivas

Com os pressupostos em (a), (b), (c) e (d), é possível se formular a equação genérica, a qual denomina-se Derivada Petraglia, para funções positivas como:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x^k}\right] = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!x^{n+k}} \qquad (4)$$

Aplicando (4) para encontrar a quarta derivada de $f(x) = 1/x$, isto é, $k = 1$ e $n = 4$:

$$\frac{d^4}{dx^4}\left[\frac{1}{x^1}\right] = (-1)^4 \frac{(4+1-1)!}{(1-1)!\,x^{4+1}} = \frac{4!}{x^5} = \frac{24}{x^5}$$

Funções racionais particulares negativas

Determinada a Derivada Petraglia para funções positivas, prossegue-se com o estudo de sua aplicação a funções negativas.

Assume-se, então, a função $w(x) = −1/x$. Suas quatro primeiras derivadas comparadas às derivadas de $f(x) = 1/x$, teremos o Quadro 7:

Quadro 7. Comparativo das derivadas de f e w.

$f^{1}(x) = -1/x^2$	$w^{1}(x) = 1/x^2$
$f^{2}(x) = 2/x^3$	$w^{2}(x) = -2/x^3$
$f^{3}(x) = -6/x^4$	$w^{3}(x) = 6/x^4$
$f^{4}(x) = 24/x^5$	$w^{4}(x) = -24/x^5$

Fonte: Elaborado pelo autor (2021).

Observa-se, com certa clareza, a distinção entre as derivadas correspondentes das duas funções: enquanto para as derivadas de f, vale a regra de paridade de n, ou seja, n par torna a derivada positiva e n ímpar a torna negativa, para as derivadas de w é o oposto.

Enquanto $f^{1}(x) = -1/x^2$, $w^{1}(x) = 1/x^2$, da mesma forma que $f^{2}(x) = 2/x^3$ e $w^{2}(x) = -2/x^3$, e assim por diante.

Então, presume-se que o fator de distinção entre as derivadas de ordem superior é o termo (b), ou $(-1)^n$.

Mas, ainda que os valores ímpares de n tornem a derivada de w positiva, o conceito de paridade e positividade ainda é o mesmo: um número negativo elevado a um expoente par resulta em um número positivo; ao passo que, se o elevar-se a um expoente ímpar, ele retorna um valor menor que zero.

Dessa forma, pode-se escrever: se para as derivadas de w o termo $(-1)^n$ é inválido, mas ainda prevalece a regra de paridade, então o expoente y de (-1) deve ser reescrito como $n-1$, pois para n par, o expoente é ímpar, e vice-versa.

Assim, articula-se a Derivada Petraglia para funções negativas como:

$$\frac{D^n}{dx^n}\left[-\frac{1}{x^k}\right] = (-1)^{n-1}\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!x^{n+k}} \qquad (5)$$

Determinando $w^4(x)$ a partir de (5): $n = 4$ e $k = 1$, temos:

$$\frac{d^4}{dx^4}\left[-\frac{1}{x^1}\right] = (-1)^{4-1}\frac{(4+1-1)!}{(1-1)!\,x^{4+1}} = -\frac{4!}{x^5} = -\frac{24}{x^5}$$

Então, como somente o expoente de (−1) diferencia as Derivadas Petraglia para o caso de funções positivas e negativas, pode-se reescrevê-las da seguinte forma:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[\frac{1}{x^k}\right] = (-1)^y \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,x^{n+k}} \begin{cases} 1/x^k > 0, \;\; y = n, k \in \mathbb{N}^* \\ 1/x^k < 0, \;\; y = n-1, k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

A fórmula que se encontra permanecerá válida mesmo para $n = 0$ se adotar-se as convenções de que $0! = 1$ e $(d^0/dx^0)(f) = f$, ou $f^{(0)} = f$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O intuito do desenvolvimento de expressões genéricas ou de fórmulas, seja para quaisquer casos da matemática e do cálculo, é de facilitar ao máximo os desenvolvimentos algébricos feitos manualmente, reduzindo consideravelmente o número de etapas e as chances de erro.

Embora haja uma infinidade de *softwares* que hoje realizam contas mais rápido que uma pessoa, - o que descarta a necessidade do cálculo braçal – sua programação ocorre a partir de um conjunto de comandos, os algoritmos, para que executem da maneira correta e exata o cálculo que lhes foi atribuído, após serem implementados em uma linguagem de programação.

Desta forma a solução de um problema pode ser obtida em quatro etapas: definição do problema, modelagem matemática, solução numérica e análise dos resultados". Então, antes de submeter um problema real à inteligência de um computador precisa-se, primeiro, solucioná-lo manualmente para comprovar, em seguida, se os comandos virtuais nos forneceram dados verdadeiros.

Logo, a formulação de leis gerais de formação – ou fórmulas matemáticas – pode e é diretamente aplicada às linguagens de programação após serem traduzidas em algoritmos numéricos, de modo que o usuário define os parâmetros de entrada – como as variáveis de um sistema – e o programa executa o algoritmo, fornecendo-lhe dois possíveis resultados, sendo um, via cálculo numérico, que é sempre numérico, e outro, utilizando os métodos analíticos com resultado em termos de funções matemáticas."

Assim, aplicativos virtuais, como o Wolfram Alpha e o Geogebra, os quais calculam derivadas sucessivas ou de alta ordem de uma função, operam sobre fórmulas matemáticas traduzidas em um algoritmo, que fornecem ao usuário uma solução analítica.

Portanto, a Derivada Petraglia seria uma nova fórmula de se obter a derivada de ordem n comprovando os cálculos desenvolvidos por softwares de análise numérica, além das já conhecidas no meio acadêmico e científico.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. Cálculo: um novo horizonte. 6ª. ed. Porto Alegre: Bookman, v. I, 2000.

CAMPOS, F. F. Algoritmos Numéricos. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Gen LTC, 2012.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A:** funções, limites, derivação e integração. 6ª. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** um curso moderno e suas aplicações. 10ª. ed. [S.l.]: Gen LTC, 2011.

QUEZADA, J. I. A. Un curso de Cálculo Infinitesimal para Bachillerato. In: Ivestigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte iberoamericano. México: Díaz de Santos S.A., 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. 7ª. ed. São Paulo: Cengage Learning, v. I e II, 2013.

ZUIN, E. S. L. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.). Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. p. 13-36.